Pregunta 1. (10 ptos.) Dado el sistema

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 6z &= 4 \\ 2x + 3y + \beta z &= 1 \\ 3x + 4y + z &= 0 \\ 4x + 8y + 12z &= \alpha \end{aligned}$$

Halle las condiciones que deben cumplir α y β para que el sistema:

a. Sea inconsistente
b. Tenga infinitas soluciones, y en tal caso, hállelas.
c. Tenga solución única.

Solución:

De acuerdo al sistema, obtenemos la matriz ampliada del mismo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & \beta & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 12 & \alpha \end{array}\right]$$ "Procedemos aplicando Gauss o Gauss-Jordan, según convenga"

$$\xrightarrow{f2'\leftrightarrow f3 \ y \ f3'\leftrightarrow f2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & \beta & 1 \\ 4 & 8 & 12 & \alpha \end{array}\right] \underset{\substack{f2' = f2 - 3f1' \\ f3' = f3 - 2f1' \\ f4 = f4 - 4f1'}}{\xrightarrow{f1'=\frac{f1}{2}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -8 & -6 \\ 0 & -1 & \beta-6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-8 \end{array}\right]$$

$$\underset{f3' = f3 + f2'}{\xrightarrow{f2'=\frac{f2}{-2}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \beta-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-8 \end{array}\right]$$ "Ahora procedemos a estudiar los casos"

Observemos entonces, que si $\alpha - 8 = 0 \rightarrow \ \alpha = 8$ obtenemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \beta-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow$$ Nos queda que **0 = 0**, lo cual no es falso, solo redundante. Para nuestro caso, el problema queda reducido a 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

Para el mismo caso, estudiaremos que $\beta - 2 = 0 \ \rightarrow \beta = 2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow$$ Nos queda que **0 = 0**, lo cual no es falso, solo redundante. Para nuestro caso, el problema queda reducido a 2 ecuaciones con 3 incógnitas, generando soluciones infinitas para el sistema.

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 2 \\ y + 4z = 3 \end{array}\right\}$$

Para un $z = t \leftrightarrow t \in R$

$y = 3 - 4t$

$x = 2 - 3t - 2(3 - 4t) \to x = 5t - 4$

Por otra parte, si $\alpha - 8 \neq 0 \to \alpha \neq 8$, obtendremos: Para el ejemplo, tomaremos $\alpha = 3$, entonces

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \beta - 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right] \longrightarrow$$

Nos queda que **0 = -5**, lo cual no es cierto. Generando un sistema inconsistente.

De igual forma, si $\beta - 2 \neq 0 \to \beta \neq 2$, obtendremos: Observen que para este caso, utilizando el método de Gauss en la tercera fila, podremos dividir el elemento pivote para conseguir una diagonal de puros 1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{\beta-2}{\beta-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 8 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 8 \end{array}\right] \longrightarrow$$

Nos queda que $\boldsymbol{z} = \mathbf{0}$, por lo tanto, estaría generando solución única para el sistema.

Así, nuestro sistema queda reducido a

$z = 0$

$y + 4z = 3 \to y = 3$

$x + 2y + 3z = 2 \to x = -4$

<u>En conclusión:</u>

a. El sistema es inconsistente para: $\boldsymbol{\alpha} \neq -\mathbf{8}$ *y* $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{2}$
b. El sistema tiene soluciones infinitas, sí: $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{8}$ *y* $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{2}$ $\left\{\begin{array}{l} y = 3 - 4t \\ x = 5t - 4 \end{array}\right.$
c. El sistema tiene solución única, cuando: $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{8}$ *y* $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{2}$

Pregunta 2. (10 ptos.) Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$

a. Halle la adjunta de A
b. Halle la inversa de A
c. Resuelva, para $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$

Solución:

a. Para hallar la adjunta, primero deberemos calcular los cofactores de la matriz A, luego formar una matriz de cofactores con los antes mencionados y estos trasponerlos para obtener la matriz adjunta de A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Para calcular entonces el cofactor de la entrada "a_{11}", eliminaremos la final y la columna a la que este elemento pertenece, luego se calculara el determinante de la sub-matriz o matriz menor formada y se multiplicara por el signo que corresponda.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \rightarrow A_{11} = (-1)^2.(a_{22}.a_{33} - a_{23}.a_{32})$$

Para nuestra matriz, los cofactores serán los siguientes:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow A_{11} = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow A_{12} = -3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow A_{13} = 2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow A_{21} = 1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow A_{22} = 0$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow A_{23} = -1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow A_{31} = 0$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow A_{32} = 1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow A_{11} = 0$$

Llamaremos C, a nuestra matriz de cofactores:

$$C = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \rightarrow C = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces nuestra matriz adjunta, será la traspuesta de esta matriz de cofactores:

$$\boldsymbol{Adj(A) = C^t} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boldsymbol{Adj\ (A)} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

b. Para hallar la inversa de la matriz A, primero debemos saber si esta es invertible, para ello calcularemos el determinante de A, si $\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) \neq \mathbf{0} \rightarrow$ entonces la matriz es invertible. Para calcular el terminante, existen diferentes métodos, utilizare la regla de Sarrus y el método de los menores para confirmar resultado

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{det}\ (\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}| = (1.0.3 + 2.1.1 + 0.1.3) - (1.0.3 + 0.2.3\ + 1.1.1)$$

$$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{A}) = \ |\boldsymbol{A}| = (0 + 2 + 0) - (0 + 0 + 1)$$

$$\boldsymbol{det}\ (\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}| = \mathbf{1}$$

Se cumple entonces que $\boldsymbol{det}\ (\boldsymbol{A}) \neq \mathbf{0} \rightarrow \boldsymbol{A}$ es invertible

De otra forma, utilizando el método de los menores. Como ya hemos obtenido los cofactores de cada entrada de la matriz, elegiremos una fila o columna y multiplicaremos cada elemento (o entrada) por su cofactor correspondiente y los sumaremos, así:

$$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}| = (\boldsymbol{a}_{\mathbf{11}}.\boldsymbol{A}_{\mathbf{11}} + \boldsymbol{a}_{\mathbf{12}}.\boldsymbol{A}_{\mathbf{12}} + \boldsymbol{a}_{\mathbf{13}}.\boldsymbol{A}_{\mathbf{13}})$$

$$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}| = [\mathbf{1}.(-\mathbf{1}) + \mathbf{0}.(-\mathbf{3}) + \mathbf{1}.\mathbf{2}]$$

$$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}| = (-\mathbf{1} + \mathbf{0} + \mathbf{2}) = \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{det}\ (\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}| = \mathbf{1}$$

Se cumple entonces que $\boldsymbol{det}\ (\boldsymbol{A}) \neq \mathbf{0} \rightarrow \boldsymbol{A}$ es invertible

Una vez demostrado que la matriz es invertible, procedemos a calcular su inversa utilizando la adjunta antes hallada

$$\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{det}\ (\boldsymbol{A})}\boldsymbol{Adj}(\boldsymbol{A}) \rightarrow \boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}} = \boldsymbol{Adj}(\boldsymbol{A}) \rightarrow \boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

c. Para resolver el sistema

$$A\vec{x} = \vec{b} \xrightarrow{Para\ hallar\ valores\ de\ x} \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

Resolvemos la ecuación

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} (-1 + 1 + 0) \\ (-3 + 0 + 7) \\ (2 - 1 + 0) \end{bmatrix} \rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{\mathbf{1}} \\ \boldsymbol{x}_{\mathbf{2}} \\ \boldsymbol{x}_{\mathbf{3}} \end{bmatrix}$$

Pregunta 3. (5 ptos.) Establezca, mediante una demostración o un contraejemplo, respectivamente, si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

Si A y B son matrices n x n tales que AB = 0, entonces o bien A = 0 ó B = 0

Solución: A través del siguiente contraejemplo, podremos observar que la afirmación es falsa.

Sea:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ será $A.B = 0$?

Probemos

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Entonces, obtenemos que siendo

$$A\ y\ B \neq 0 \rightarrow A.B = 0$$

Finalmente, la afirmación del enunciado es **FALSA**.